## 2.8.9 Parametrické rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

**Předpoklady:** 2410, 2411, 2806

**Pedagogická poznámka:** Opět si napíšeme na začátku hodiny na tabuli (nejlépe tak, aby se zápis mohl otočit nebo jinak schovat a v případě potřeby ho bylo možné opět ukázat) jednotlivé kroky postupu při řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou a při řešení příkladů v případě, že se studenti ztratí, na tento postup odkazuji.

**Pedagogická poznámka:** Hodina obsahuje pouze tři příklady, všechny řešené minimálně dvěma způsoby. Řešení pomocí významu absolutní hodnoty je důležité a schválně řazené až jako druhé, protože mnohým žákům vyjasní část předchozího klasického řešení.

Postup řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou metodou dělení definičního oboru:

- zbavíme se absolutní hodnoty podle znaménka výrazu uvnitř a tím rozdělíme výpočet na dvě, případně více cest,
- spočteme rovnice (nerovnice) v každé z cest,
- zkontrolujeme, zda výsledek patří mezi čísla, se kterými jsme v dané cestě počítali,
- výsledky, které prošly kontrolou v předchozím kroku, dáme dohromady.

Metoda řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou pomocí významu absolutní hodnoty:

- $|x-3|=2$ : hledáme čísla na ose vzdálená od čísla 3 o 2,
- $|x+1|=|x-(-1)|=5$ : hledáme čísla na ose vzdálená od čísla -1 o 5.

**Př. 1:** Vyřeš rovnici $|x-3|=c-1$ s neznámou *x* a parametrem *c*.

$|x-3|=c-1$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot *x*. Záleží na znaménku výrazu $(x-3)$.

| | |
|---|---|
| $(x-3)\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$<br>uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$<br>$\lvert x-3\rvert=x-3$<br>$x-3=c-1$<br>$x=c+2$<br>Počítáme jen s $x\geq 3$ $\Rightarrow$, pokud je číslo $x=c+2$ řešením musí platit $x=c+2\geq 3$<br>$c+2\geq 3$ | $(x-3)\leq 0 \Rightarrow x\leq 3$<br>uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$<br>$\lvert x-3\rvert=-x+3$<br>$3-x=c-1$<br>$x=4-c$<br>Počítáme jen s $x\leq 3$ $\Rightarrow$, pokud je číslo $x=4-c$ řešením musí platit $x=4-c\leq 3$<br>$4-c\leq 3$ |
| $c\geq 1$<br>Kořen $x=c+2$ je mezi čísly, se kterými jsme počítali $K_1=\{c+2\}$ | $1\leq c$<br>Kořen $x=4-c$ je mezi čísly, se kterými jsme počítali $K_2=\{4-c\}$ |
| $c<1$<br>Kořen $x=c+2$ není mezi čísly, se kterými jsme počítali. $K=\emptyset$ | $c<1$<br>Kořen $x=4-c$ není mezi čísly, se kterými jsme počítali. $K=\emptyset$ |

Nedělili jsme výpočet podle různých hodnot *c*, ale rozdělili jsme všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsme to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení $K = K_1 \cup K_2 = \{c+2;4-c\}$

Ještě zkontrolujeme hraniční hodnotu *c*. Pro $c=1$ platí:
$c+2=1+2=3$
$4-c=4-1=3$
Oba kořeny se rovnají.

**Závěrečný přehled:**

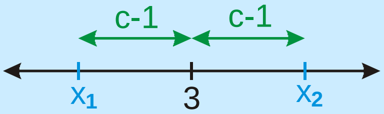
| **Hodnoty parametru *c*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $c \in (1;\infty)$ | $K=\{c+2;4-c\}$ |
| $c=1$ | $K=\{3\}$ |
| $c \in (-\infty;1)$ | $K=\emptyset$ |

**Pedagogická poznámka:** Studenti poměrně rychle a snadno spočítají kořeny, ale je těžké je donutit k tomu, aby zkontrolovali, zda patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. Většinou po chvíli spočítám jednu z cest a až druhou nechám na nich.

**Př. 2:** Vyřeš rovnici $|x-3|=c-1$ s neznámou *x* a parametrem *c* použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x-3|=c-1$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla 3 na ose vzdáleny o $c-1$.
$\Rightarrow$ výraz $c-1$ znamená vzdálenost $\Rightarrow$ dělíme podle hodnot parametru *c*:
$c-1<0 \Rightarrow c<1$ - vzdálenost je záporná – nesmysl $\Rightarrow$ $K=\emptyset$
$c-1=0 \Rightarrow c=1$ - vzdálenost je nulová $\Rightarrow$ jediné číslo, jehož obraz má nulovou vzdálenost od obrazu čísla 3, je opět číslo 3 $\Rightarrow K=\{3\}$.

$c-1>0 \Rightarrow c>1$ - vzdálenost je větší než nula $\Rightarrow$ budou existovat dvě taková čísla - jedno nalevo a jedno napravo od trojky. Velikosti najdeme z obrázku:




$x_1 = 3-(c-1) = 3-c+1 = 4-c$

$x_2 = 3+(c-1) = 2+c$

$K=\{c+2;4-c\}$

**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *c*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $c \in (1;\infty)$ | $K=\{c+2;4-c\}$ |
| $c=1$ | $K=\{3\}$ |
| $c \in (-\infty;1)$ | $K=\emptyset$ |

Stejný výsledek jako v předchozím příkladě (jinak by to ani nešlo).

**Pedagogická poznámka:** Hodně studentů má problémy s výpočtem řešení pomocí vzdálenosti $c-1$. Snažím se, aby si to v případě problémů vyzkoušeli na konkrétních číslech a pak postup napodobili.

**Pedagogická poznámka:** Z řešení příkladu 2 je jasné, proč v příkladu 1 vyšly z obou větví stejné podmínky pro hodnoty parametru *c*.

**Př. 3:** Vyřeš rovnici $|x-p|=2$ s neznámou *x* a parametrem *p* metodou dělení definičního oboru.

$|x-p|=2$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot *x*. Záleží na znaménku výrazu $(x-p)$.

| | |
|---|---|
| $x-p<0 \Rightarrow x<p \Rightarrow x\in(-\infty;p)$ | $x-p\geq 0 \Rightarrow x\geq p$ |
| uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$ | uvnitř absolutní hodnoty nezáporné číslo $\Rightarrow$ |
| $\|x-p\|=-x+p$ | $\|x-p\|=x-p$ |
| $\|x-p\|=2$ | $\|x-p\|=2$ |
| $-x+p=2$ | $x-p=2$ |
| $x=p-2$ | $x=p+2$ |
| Musíme zkontrolovat, zda $x=p-2$ je mezi čísly, se kterými počítáme ( $x<p$ ) | Musíme zkontrolovat, zda $x=p+2$ je mezi čísly, se kterými počítáme ( $x\geq p$ ) - |
| $x=p-2<p$ | $x=p+2>p$ |
| $-2<0$, platí vždy (pro každé *p*) $\Rightarrow$ řešení $p-2$ je vždy mezi čísly, se kterými počítáme $\Rightarrow$ $K_1=\{p-2\}$ | $2>0$, platí vždy (pro každé *p*) $\Rightarrow$ řešení $p+2$ je vždy mezi čísly, se kterými počítáme $\Rightarrow$ $K_2=\{p+2\}$ |

Nedělili jsme výpočet podle různých hodnot *p*, ale rozdělili jsme všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsme to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení.
$K=K_1\cup K_2=\{p-2;p+2\}$

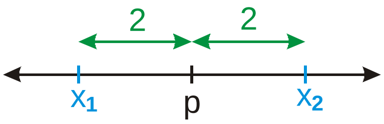
**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *p*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $p\in R$ | $K=\{p-2;p+2\}$ |

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako v minulé hodině mají někteří problém s tím, že se řešení nevětví podle parametru.
Stejně jako v příkladu 1 je velkým problémem kontrola získaného kořene.
Nerovnosti $-2<0$ a $2>0$ jsou často interpretovány jako znak toho, že řešením rovnice je množina reálných čísel. Je třeba vracet se k tomu, co tento okamžik žáci počítají (kontrolují, zda číslo $p-2$ patří mezi čísla, se kterými jsme počítali) a na základě uvědomění si toho rozhodovat, co nerovnost znamená (za číslo *p* můžeme dosadit cokoliv a číslo $p-2$ bude patřit mezi čísla, se kterými jsme v intervalu počítali).

**Př. 4:** Vyřeš rovnici $|x-p|=2$ s neznámou $x$ a parametrem $p$ použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x-p|=2$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla $p$ vzdáleny o 2.




$x_1 = p-2$

$x_2 = p+2$

$K=\{p-2; p+2\}$

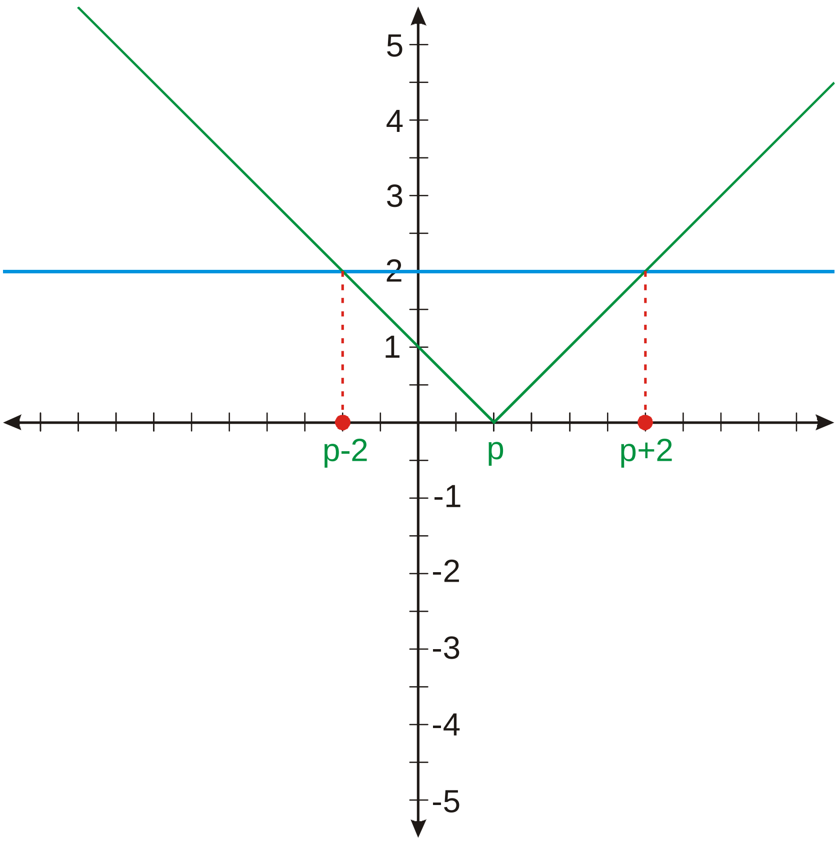
**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *p*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $p \in R$ | $K=\{p-2; p+2\}$ |

**Př. 5:** Vyřeš rovnici $|x-p|=2$ s neznámou $x$ a parametrem $p$ graficky.

Levá strana – funkce $y=|x-p|$ $\Rightarrow$ funkce absolutní hodnota, posunutá po ose $x$ o $p$.

Pravá strana – funkce $y=2$.




$K=\{p-2; p+2\}$

**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *p*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $p \in R$ | $K=\{p-2; p+2\}$ |

**Př. 6:** Vyřeš nerovnici $|x+c| \leq 3$ s neznámou *x* a parametrem *c*.

$|x+c| \leq 3$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot *x*. Záleží na znaménku výrazu $(x+c)$.

$(x+c) \leq 0 \Rightarrow x \leq -c$

uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$

$|x+c| = -x-c$

$-x-c \leq 3$

$-c-3 \leq x$

Zdá se, že $x \in \langle -3-c; \infty)$

Počítáme jen s $x \leq -c$

číslo $-3-c$ je menší než $-c$ $\Rightarrow$ z intervalu něco zbylo $K_1 = \langle -3-c; -c \rangle$

$(x+c) \geq 0 \Rightarrow x \geq -c$

uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$

$|x+c| = x+c$

$x+c \leq 3$

$x \leq -c+3$

Zdá se, že $x \in (-\infty; -c+3\rangle$

Počítáme jen s $x \geq -c$

číslo $-c+3$ je větší než číslo $-c$ $\Rightarrow$ z intervalu něco zbylo $K_2 = \langle -c; -c+3 \rangle$

Nedělili jsme výpočet podle různých hodnot *c*, ale rozdělili jsme všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsme to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení $K = K_1 \cup K_2 = \langle -3-c; -c \rangle \cup \langle -c; -c+3 \rangle = \langle -3-c; -c+3 \rangle$.

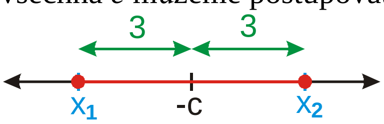
**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *c*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $c \in R$ | $K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$ |

**Př. 7:** Vyřeš rovnici $|x+c| \leq 3$ s neznámou *x* a parametrem *c* použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x+c| = |x-(-c)| \leq 3$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu $-c$ vzdáleny o 3 nebo méně.

parametr *c* představuje číslo, od kterého měříme vzdálenost, na jeho hodnotě nezáleží $\Rightarrow$ pro všechna *c* můžeme postupovat stejně




$x_1 = -c-3$

$x_2 = -c+3$

$K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *c*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $c \in R$ | $K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$ |

**Př. 8:** Petáková:
strana 21/cvičení 7 b) c) d)

**Shrnutí:**